Teoria miary

WPPT/Matematyka, rok II

Lista 19

1. Niech μ i ν będą dwiema skończonymi miarami znakowanymi na przestrzeni $(X, \mathcal{F})$.
   (a) Wykazać istnienie miary znakowanej $\mu \wedge \nu$ spełniającej warunek:
   $$\mu \wedge \nu(F) \leqslant \min(\mu(F), \nu(F)) \qquad \forall F \in \mathcal{F}$$
   oraz takiej, że dla dowolnej innej miary znakowanej η na $(X, \mathcal{F})$, jeśli warunek $\eta(F) \leqslant \min(\mu(F), \nu(F))$ zachodzi dla wszystkich $F \in \mathcal{F}$, to $\eta(F) \leqslant \mu \wedge \nu(F)$ $(\forall F \in \mathcal{F})$.
   Wskazówka: Przyjąć $\mu \wedge \nu \ = \ \frac{1}{2}[\ \mu + \nu - |\mu - \nu|\ ]$.
   (b) Wykazać, że istnieje miara znakowana $\mu \vee \nu$ taka, że:
   $$\max(\mu(F), \nu(F)) \leqslant \mu \vee \nu(F) \qquad \forall F \in \mathcal{F}$$
   oraz $\mu \vee \nu \leqslant \eta$ dla dowolnej innej miary znakowanej η na $(X, \mathcal{F})$ spełniającej $\max(\mu(F), \nu(F)) \leqslant \eta(F)$ $(\forall F \in \mathcal{F})$.
   (c) Niech μ i ν oznaczają dwie miary nieujemne. Wykazać, że $\mu \perp \nu \iff \mu \wedge \nu = 0$.
   (d) Sprawdzić, że $(\mu \vee \nu) + (\mu \wedge \nu) = \mu + \nu$.

2. Niech $(X, \mathcal{F})$ oznacza przestrzeń miarową. Oznaczmy przez $ca(\mathcal{F})$ rodzinę wszystkich skończonych miar znakowanych na $\mathcal{F}$. Udowodnić, że $ca(\mathcal{F})$ z normą $||\nu|| = |\nu|(X)$ jest przestrzenią Banacha (tzn. przestrzenią liniową unormowaną, w której metryka wyznaczona przez normę jest zupełna).

3. Wykazać, że zbieżność w normie $||\cdot||$ w $ca(\mathcal{F})$ jest równoważna zbieżności jednostajnej miar, tzn. $||\nu_n - \nu|| \to 0 \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n \geqslant N} \forall_{E \in \mathcal{F}}\ \ |\nu_n(E) - \nu(E)| \to 0$.

4. Wykazać, że w przypadku przestrzeni $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ zbiór $ca(2^{\mathbb{N}})$ pokrywa się z przestrzenią l_1.

5. (a) Podać przykład przestrzeni $(X, \mathcal{F})$ oraz miary znakowanej ν na $\mathcal{F}$, dla której rozkład Hahna nie jest jednoznaczny.
   (b) Wykazać, że jest on zawsze jednoznaczny z dokładnością do zbiorów zerowych.
   (c) Podać przykład przestrzeni, dla których rozkład Hahna jest jednoznaczny (dosłownie).
   (d) Wykazać, że rozkład Jordana miary znakowanej ν na różnicę dwóch miar nieujemnych wzajemnie singularnych jest jednoznaczny.

6. Niech μ będzie miarą znakowaną, a f funkcją mierzalną, dla której całki $\int f\,d\mu^+$ i $\int f\,d\mu^-$ są skończone. Definiujemy $\int f\,d\mu = \int f\,d\mu^+ - \int f\,d\mu^-$. Udowodnić, że wtedy
   $$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d|\mu|.$$

7. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ oznacza przestrzeń z miarą znakowaną. Wykazać, że rodzina $\mathcal{P}$ wszystkich zbiorów czysto dodatnich względem miary μ jest σ-ideałem. Czy jest σ-filtrem (zamknięta na przeliczalne przekroje i branie nadzbiorów)? Podobne pytania dla rodziny zbiorów czysto ujemnych.

8. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ oznacza przestrzeń ze skończoną miarą znakowaną. Udowodnić, że jeżeli $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem zbiorów mierzalnych, dla którego istnieje $\lim_n A_n$, to

$$\mu(\lim_n A_n) = \lim_n \mu(A_n).$$

Czy założenie skończoności miary jest istotne?

9. Niech λ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$. Zdefiniujmy miarę znakowaną ν wzorem

$$\nu(H) = \lambda(H) - \int_H \frac{5}{1+x^2}\, d\lambda.$$

Znaleźć rozkład Hahna miary ν.

10. Niech μ będzie miarą skończoną na $(X, \mathcal{F})$. Dla danych zbiorów A, $B \in \mathcal{F}$ definiujemy $\nu(H) = \mu(H\cap A) - \mu(H\cap B)$ $(H \in \mathcal{F})$. Uzasadnić, że ν jest miarą znakowaną i znaleźć jej rozkład Hahna. Udowodnić, że $\nu \ll \mu$ i znaleźć pochodną Radona-Nikodyma.

11. Niech ν_1, ν_2, μ oznaczają pewne miary znakowane na $(X, \mathcal{F})$. Wykazać, że:

   (a) $\nu_1 \perp \nu_2 \quad \wedge \quad \nu_1 \ll \nu_2 \quad \Longrightarrow \quad \nu_1 = 0$,

   (b) $\nu_i \perp \mu$ dla $i = 1, 2 \quad \Longrightarrow \quad (c_1 \cdot \nu_1 + c_2 \cdot \nu_2) \perp \mu \qquad$ gdzie $c_i \in \mathbb{R}$,

   (c) $\nu_i \ll \mu$ dla $i = 1, 2 \quad \Longrightarrow \quad (c_1 \cdot \nu_1 + c_2 \cdot \nu_2) \ll \mu \qquad$ gdzie $c_i \in \mathbb{R}$.